UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
FACULTATEA DE FIZICĂ

CONCURSUL DE ADMITERE

2024

MATEMATICĂ

Model

1. (0.9p) Determinaţi numărul complex z pentru care $\overline{z} + 2z = 3 + 2i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

a) $z = i$; b) $z = 1 + i$; c) $z = 1 + 2i$; d) $1 - i$.

2. (0.9p) Fie $E(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^8$. Termenul care nu îl conţine pe x este:

a) C_8^2; b) $2\,C_8^2$; c) C_8^4; d) C_8^1.

3. (0.9p) Valoarea numărului real m pentru care polinomul $f = X^3 - 4X^2 + 5X + m$ este divizibil cu polinomul $X + 1$ este:

a) $m = 1$; b) $m = 0$; c) $m = -2$; d) $m = 10$.

4. (0.9p) Fie $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$. Atunci:

a) $L = 0$; b) $L = 2$; c) $L = \dfrac{1}{2}$; d) $L = \dfrac{1}{3}$.

5. (0.9p) Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1) \ln x$. Atunci, $f'(1)$ este:

a) -1; b) 2; c) 1; d) 0.

6. (0.9p) Fie $I = \int_0^1 (x+2)\, e^x \,\mathrm{d}x$. Atunci:

a) $I = 2e - 1$; b) $I = e + 1$; c) $I = 1$; d) $I = e - 1$.

7. (0.9p) Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x^2+3} = x + 1$ este:

a) $S = \{0\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \{-1\}$; d) $S = \emptyset$.

8. (0.9p) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3 - x - 3 = 0$.
Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ are valoarea:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

9. (0.9p) Abscisa punctului de minim local al funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$ este:

a) 0; b) -3; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $-\dfrac{1}{3}$.

10. (0.9p) Soluţia inecuaţiei $2^{x^2-6} \leq \dfrac{1}{4}$ este:

a) $(-2, 2)$; b) $[-2, 2]$; c) $(2, \infty)$; d) $(-\infty, 2]$.

11. a) **(1p)** Să se determine ecuaţia tangentei în punctul de abscisă $x_0 = 0$ la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
b) **(1.5p)** Demonstraţi că $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
c) **(2p)** Arătaţi că $\int_0^1 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \leq \dfrac{\pi}{4}$.

12. a) **(1p)** Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6$ este bijectivă.
b) **(1.5p)** Demonstraţi că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie bijectivă şi crescătoare iar f^{-1} este inversa sa, atunci x_0 este soluţie a ecuaţiei $f(x) = f^{-1}(x)$ dacă şi numai dacă x_0 este soluţie a ecuaţiei $f(x) = x$.
c) **(2p)** Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt[3]{6+x} = x^3 - 6$.

Subiectele 1-10 au un singur răspuns corect.
Subiectele 11 şi 12 vor fi rezolvate complet.

Nota finală N=0.6N1+0.4N2, unde
N1=punctajul total de la problemele 1-10 +1p din oficiu,
N2=punctajul total de la problemele 11-12 +1p din oficiu.

Timp de lucru - două ore.